

わ かる ! 解 ける !

数学 トレーニング

Stage 2

微分

◆極限值と微分係数

ある関数を**微分**すると、その関数の値の変化を調べることができます。微分するとは、一般的に**導関数**を求めることを指します。では、導関数とは何でしょうか。それを学ぶために、まずは**極限值**や**平均変化率**、**微分係数**とは何かから、ここではおさえていくことにします。

■ 極限值

x が a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

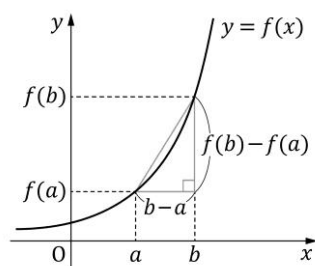
と表し、この α を、 x が限りなく a に近づくときの $f(x)$ の極限值という。

■ 平均変化率

$y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変化するとき、

$$\text{平均変化率} = \frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

これは、2 点 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ を結んでできる直線の傾きに等しい。



■ 微分係数

x の値が a から $a + h$ まで変化するときの平均変化率において、 h が 0 に限りなく近づくとき、平均変化率が一定の値に限りなく近づくならば、その極限値を、 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい、 $f'(a)$ と表す。

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

例題

$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$ を求めよ。

<解説>

x が限りなく 1 に近づくとき、 $x + 2$ の値は限りなく 3 に近づくから、

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

答え 3

例題

$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h + h^2)$ を求めよ。

<解説>

h が限りなく 0 に近づくと、 h も h^2 も限りなく 0 に近づくから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h + h^2) = 1$$

答え 1

例題

関数 $f(x) = x^2$ において、 x の値が 2 から 5 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

<解説>

平均変化率は $\frac{y \text{ の変化量 }}{x \text{ の変化量 }}$ より、 $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{3} = 7$

答え 7

例題

関数 $f(x) = x^2$ において、 x の値が 2 から $2 + h$ まで変化するときの平均変化率を h で表せ。ただし、 $h \neq 0$ とする。

<解説>

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

答え $4 + h$

例題

関数 $f(x) = x^2$ において、微分係数 $f'(2)$ を求めよ。

<解説>

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

前の例題の結果より、 $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$

答え 4

練習問題

□ 関数 $f(x) = x^3$ において、次のものを求めよ。

- (1) x の値が 2 から 4 まで変化するときの平均変化率
- (2) x の値が 2 から $2 + h$ ($h \neq 0$) まで変化するときの平均変化率
- (3) 微分係数 $f'(2)$

ベクトル

◆平面上のベクトルと演算

向きと大きさだけで定まる量を**ベクトル**といいます。そのため、位置の違いを問題にしません。線分との違いに気をつけましょう。

■ ベクトル

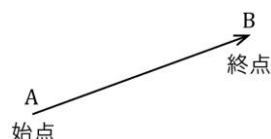
始点がA、終点がBのベクトルは、矢印を使って $\overrightarrow{AB}$ と表す。

逆ベクトル…向きが反対で、大きさが等しいベクトルを逆ベクトルといい、マイナスをつけて表す。

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

零ベクトル…始点と終点が一致するベクトルで、大きさは0である。このときの向きは考えない。 $\vec{0}$ と表す。

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$



■ ベクトルの実数倍

大きさが実数倍になる。

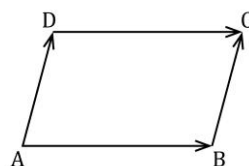
正の実数のときは同じ向き、負の実数のときは反対の向きになる。

例えば、 $-3\overrightarrow{AB}$ は大きさが $\overrightarrow{AB}$ の大きさの3倍、向きが $\overrightarrow{AB}$ とは反対のベクトル

■ ベクトルの相等

向きが同じで、大きさが等しい2つのベクトルは「等しい」という。

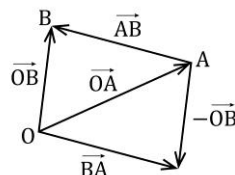
例えば、右図の平行四辺形で、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 、 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



■ ベクトルの加法、減法

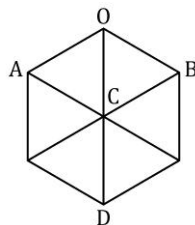
・ 和： $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

・ 差： $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$



例題

右図の正六角形において、 $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ。

**<解説>**

$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$ であるから、まず $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表すことを考える。

$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{OB}$ は向きが同じで大きさが等しいベクトルであるから、

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$$

答え $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$
--

例題

次の空欄に $\overrightarrow{OA}$ または $\overrightarrow{OB}$ を入れて式を完成させよ。

$$\overrightarrow{AB} = \square - \square$$

<解説>

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ である。

答え $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
--

練習問題

□ 右図の正六角形において、次のベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{DE}$

(2) $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AE}$

